

Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule und das Problem der „guten“ Aufgaben

Schulleitertagung S.-H.
Rendsburg, 27. Oktober 2005
Prof. Dr. Gerd Walther, Mathematisches Seminar der CAU zu Kiel

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Neue Herausforderungen an Lehrkräfte: Think global act local

Verschiedene Studien (IGLU, PISA) haben bestätigt, was ohnehin vermutet worden war: es bestehen zum Teil erhebliche regionale Unterschiede in der Bildungsqualität und den Bildungsergebnissen der Schülerinnen und Schüler.

- Gefordert ist daher auch eine veränderte Einstellung von Lehrkräften:
Verantwortlichkeit für Bildungsqualität und Bildungsergebnisse bei Schülerinnen und Schülern über die Klassenzimmergrenze hinaus.
- Orientierung an Bildungsstandards.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

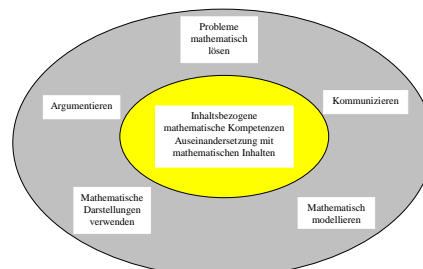
Neue Herausforderungen an den Mathematikunterricht – und damit an die Lehrkräfte im Fach Mathematik

- Überwindung einer vielfach auf mathematische Routineverfahren gerichteten Unterrichtspraxis und stattdessen
- Entwicklung und Festigung von allgemeinen (prozessbezogenen) Aktivitäten/Kompetenzen in Verbindung mit mathematisch substantiellen Inhalten.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Inhaltsbezogene und Allgemeine mathematische Kompetenzen



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Vgl. Bildungsstandards
Mathematik 4. Schuljahr

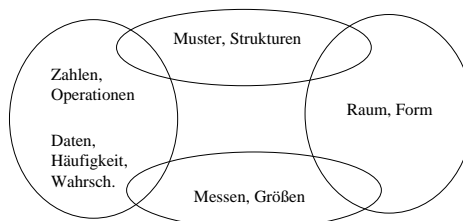
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in den Bereichen

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

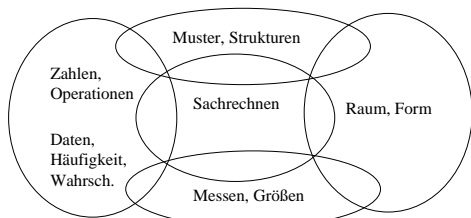
Beziehungen zwischen Leitideen bzw. inhaltlichen Kompetenzen



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beziehungen zwischen Leitideen bzw. inhaltlichen Kompetenzen



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Mathematische Inhaltsbereiche gem. Standards und Arbeitsfelder im Lehrplan GS in S.-H.

Bildungsstandards GS Leitideen	Lehrplan GS in S.-H. Arbeitsfelder
Zahlen und Operationen	Zahlbegriffsentwicklung Operationen
Raum und Form	Geometrie
Muster und Strukturen	???
Größen und Messen	Größen Sachrechnen
Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit	???

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beziehung zwischen allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik (4. Klasse)

und Schlüsselqualifikationen bzw. der
Konzeption von Mathematikunterricht in der
Grundschule, wie sie der S.-H. Lehrplan
beschreibt

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Standards	Lehrplan (Der Beitrag des Faches zur grundlegenden Bildung...), Stichwörter
Mathematische Darstellungen verwenden	Begriffe und Symbole müssen in die Realität hineingedacht werden. Lösungsstrategien beschreiben
Problemlösen	Lernen ist an Problemen zu initiieren. Lernen ist aktiver Aneignungsprozess, Lösungsstrategien entwickeln, beschreiben und anwenden,
Modellieren	Zusammenhänge der Realität in mathematische Begriffe übersetzen, math. Begriffe und Operationen in die Realität hineindenken.
Argumentieren	Lernen in sozialen Bezügen, Kommunikationsstrukturen aufbauen, in denen sachliches Argumentieren und aktives Zuhören gefördert werden.
Kommunizieren	

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Fazit

- Zwischen den Forderungen in den Bildungsstandards Mathematik (4. Klasse) und den Vorgaben des S.-H. Lehrplans für die Grundschule bestehen enge Verbindungen aber auch Unterschiede.
- Die Forderungen der Bildungsstandards Mathematik sind nicht „schon wieder“ etwas radikal Neues, sondern lassen sich in eine konstruktive Beziehung zu den Zielen des Lehrplans bringen.
- Die zukünftig erfolgende bundesweite Überprüfung der Bildungsstandards verleiht - ihnen im Vergleich zu Lehrplänen - eine stärkere Verbindlichkeit.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Mathematik als Aufgabenfach und der sinnvolle Umgang mit Aufgaben

Der Mathematikunterricht wird – anders als andere Fächer – wesentlich durch die Arbeit mit Aufgaben geprägt.

Deshalb liegt es nahe, die Entwicklung und Festigung von **allgemeinen mathematischen Aktivitäten/Kompetenzen** im Unterricht mit **inhaltlich substantiellen AUFGABEN zu betreiben**.

Dies soll unter einem sinnvollen Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht verstanden werden.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgaben, das täglich Brot des Mathematikunterrichts

Rechen-Olympiade

4. Schuljahr

Fortsetzung

23

Der Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht gehört zu den grundlegenden, alltäglichen Tätigkeiten von Lehrkräften

Dazu gehört die

Auswahl, Vorbereitung (Aufgabenblätter, Didakt. Material, Lösung), Anpassung, Bewertung, Korrektur ...

von Aufgaben.

27.10. 2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Umsetzung im Unterricht - Handlungsleitende Kognitionen: Steuerung von Lehrerhandlungen aus dem Kopf

Steht die neue Herausforderung zur Entwicklung und Festigung allgemeiner (prozessbezogener) Aktivitäten und Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern im Einklang mit gängigen Einstellungen von Lehrkräften zur Mathematik?

27.10. 2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Was denken Grundschullehrkräfte über die Mathematik? Befunde aus der IGLU Studie

- **Dominanz inhaltsbezogener Sicht:**
 - Mathematik ist Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren (stimmt: fast 50%)
 - Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden (stimmt: fast 75%)
- **Mathematik als geschlossenes System:**
 - Mathematik zu betreiben heißt, allgemeine Gesetze und Verfahren auf spezielle Aufgaben anzuwenden (stimmt: fast 85%)

Lehrkräfte sollen die Entwicklung allgemeiner, prozessbezogener Aktivitäten anregen

27.10. 2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Befund aus IGLU

Die IGLU Ergebnisse deuten darauf hin, dass Lehrkräfte eher zu einer inhaltsbezogenen, statischen Auffassung von Mathematik neigen, bei der die Genese von Mathematik, Mathematisieren, Entdeckende Aktivitäten, Argumentieren, nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Fazit: Eine prozessbezogene Auffassung von Mathematik bei Lehrkräften ist nicht selbstverständlich

27.10. 2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Konsequenz

Die Entwicklung/Festigung allgemeiner mathematischer Kompetenzen bei den Lernenden muss für Lehrkräfte **zu einer bewussten**, für manche vielleicht zu einer neuen **Aufgabe** im Unterricht werden.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Das Arbeitsfeld im Überblick

Mathematik

Wissenschaft von
Mustern/Strukturen

Curriculum

Aufgaben

Ziel: Entwicklung und
Festigung von Kompetenzen /
Aktivitäten

inhaltliche K.
allgemeine K.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Verschiedene Arten von Aufgaben- verschiedene Lernziele und Lernchancen

- Isolierte Aufgaben
- Strukturierte Aufgaben

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Isolierte Aufgaben Beispiele

Aus einem aktuellen Rechenbuch der 4. Klasse

➤ Addiere die Zahlen. Zur Probe addiere von oben nach unten.

a) 638	b) 922	c) 418	d) 888
+ 203	+ 866	+ 96	+ 152
+ 845	+ 735	+ 731	+ 74

➤ Schreibe unteneinander, oben addiere.

a) 738 + 917 + 435	b) 670 + 58 + 613
626 + 49 + 568	978 + 76 + 735
425 + 381 + 37	823 + 94 + 987

Welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen können mit solchen Aufgaben gefördert werden?

637-65 732-76 562-72 240-83 438-21 1103-84 2234-37
215-81 217-44 953-94 826-47 912-43 1017-68 1821-43
358-74 904-81 746-62 495-96 846-52 2109-24 3572-21

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Isolierte Aufgaben

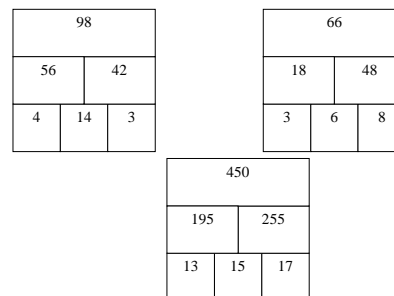
$$\begin{array}{l} 18 + 48 = 66 \\ 56 + 42 = 98 \\ 195 + 255 = 350 \\ \text{usw.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 18 + 48 = 66 \\ 56 + 42 = 98 \\ 195 + 255 = 350 \\ \text{usw.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 6 = 18 \\ 6 \cdot 8 = 48 \\ 3 \cdot 14 = 42 \\ 14 \cdot 4 = 56 \\ \text{usw.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot 6 = 18 \\ 6 \cdot 8 = 48 \\ 3 \cdot 14 = 42 \\ 14 \cdot 4 = 56 \\ \text{usw.} \end{array}$$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Strukturierte Aufgaben Beispiel: Mal-Plus-Häuser



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Mal-Plus-Häuser ausrechnen

5	12	7

13	15	17

18		
3		8

55		

Beziehungen erkennen und nutzen

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Mal-Plus-Haus verändern

98		
56	42	
4	14	3

Erhöhe den linken (mittleren, rechten) Grundstein um 1.

Was fällt bei den Zahlen im Dach auf?

112		
70	42	
5	14	3

105		
60	45	
4	15	3

112		
56	56	
4	14	4

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Besondere Grundsteine

1	2	3

Berechne für jedes Haus die Zahl im Dach.

Was fällt auf?

Wie ändert sich die Zahl im Dach?

2	3	4

3	4	5

4	5	6

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Besondere Grundsteine

1	2	3

Das Starthaus hat die Grundsteine 1, 2, 3.

Baue neue Häuser indem du die Grundsteine verdoppelst, verdreifachst, usw.

2	4	6

3	6	9

4	8	12

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Wesentliches an strukturierten Aufgaben

- Die einzelnen (Rechen-) Aufgaben sind nicht mehr isoliert, sondern sind in einer Struktur/einem Muster verknüpft
- Zudem sind in den Aufgaben manchmal verschiedene Rechenarten (hier: Addition und Multiplikation) verknüpft
- **Konsequenz: Strukturierte Aufgaben bieten natürliche Ansatzpunkte zum Rechnen, Variieren, Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren**

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Das prozessbezogene Potential von Aufgaben erkennen und nutzen: Zwei Instrumente

- Aufgabenanalyse
- Aufgabenvariation

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Fragestellungen zur Aufgabenanalyse:

- Welche Aufgaben (auf der Schulbuchseite) sind zur Förderung allgemeiner mathematischer (prozessbezogener) Aktivitäten/Kompetenzen geeignet?
- Welche allgemeinen (prozessbezogenen) Aktivitäten/Kompetenzen können mit den Aufgaben gefördert werden?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Fragestellung zur Aufgabenvariation:

- Welche Aufgaben (auf der Schulbuchseite) lassen sich durch Schüler (bzw. Lehrkraft) so variieren, dass dabei die Förderung allgemeiner mathematischer (prozessbezogener) Aktivitäten/Kompetenzen angeregt werden kann?
- Welche allgemeinen (prozessbezogenen) Aktivitäten/Kompetenzen können durch die Variation einer Aufgabe gefördert werden?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beispiele zu Aufgabenanalyse und Aufgabenvariation

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgabenanalyse

Beispiel 1

- Manche Aufgaben enthalten explizite Anforderungen zu prozessbezogenen Tätigkeiten

2 Finde weitere Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis.

a) $25 + 26 = 51$	b) $17 + 71 = 88$	c) $39 + 8 = 47$
$26 + 25 = 51$	$77 + 11 = 88$	$40 + 7 = 47$
$21 + 30 = 51$	$71 + 17 = 88$	$41 + 6 = 47$

e) Warum sind die Ergebnisse in einem Päckchen immer gleich?

Welche prozessbezogenen Tätigkeiten können durch die Aufgabe bei den Kindern angeregt werden?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Erste Ideen aus dem Aufgabentext

- „Finde weitere Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis“
 - Über die gegebene Information hinaus gehen, Aufgabenstellung variieren, fortsetzen
 - Verallgemeinerungen formulieren
- „Warum sind die Ergebnisse in einem Päckchen immer gleich?“
 - Formulieren,
 - Begründen,
 - Sich an Vereinbarungen halten

Problemlösen

Entdecken

Mathe-
matisieren

Argumentieren

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Details der Aufgabenanalyse: Mathematisieren

- Das Gegebene „mathematisch sehen“, d.h. mit mathematischen Mitteln erfassen und darstellen; strukturelle Beziehungen, Muster zwischen den Aufgaben jedes Päckchens herausfinden
 - Bei Päckchen a): Zweite Aufgabe z.B. Tauschaufgabe der ersten, oder: gegenseitige Veränderung der Summanden. Dritte Aufgabe entsteht aus der ersten/zweiten durch gegenseitige Veränderung... Vgl. auch c) und d)
 - Bei Päckchen b): Gegenseitige Veränderung der Summanden in den drei Aufgaben. Oder: zweite und dritte Aufgabe gehen durch Austausch der Einerziffern aus einander hervor

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Details der Aufgabenanalyse: Problemlösen, Entdecken

- Die Einsichten, das „mathematisch Gesehene“ nutzen, um tatsächlich
 - über die gegebene Information hinauszugehen und die Aufgabenstellung/das Muster fortzusetzen
 - Verallgemeinerungen zu formulieren
 - Auch nach eigenen Regeln Aufgaben mit gleichem Ergebnis zu konstruieren.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Details der Aufgabenanalyse: Argumentieren

- Das erkannte Muster, die erkannte Beziehungen zwischen den Aufgaben
 - sprachlich ausdrücken
- Das erkannte Muster, die erkannte Beziehungen zwischen den Aufgaben
 - für die Begründung der gleichen Ergebnisse nutzen

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Argumentationsbeispiele von Viertklässlern (aus der IGLU Studie)

$$77 + 11 = 88$$

$$71 + 17 = 88$$

Warum sind die Ergebnisse eines solchen Pärchens immer gleich?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schüler begründen

☞ Weil nur ~~so~~ die Einer bei den Zahlen vertauscht und es werden keine anderen Zahlen benutzt. So kommt immer das selbe Ergebnis heraus.

☞ Weil an dieselben Lehmer sind nur vertauscht in er

☞ Weil nur die letzten zwei Zahlen verwechselt werden.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schüler begründen; Forts. 1

☞ Man hat einfach die Einer vertauscht.

☞ Weil ~~das~~ die zweite Zahl er von der ersten zoll mit der zweiten zoll von der zweiten zoll ausgetauscht wird.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schüler begründen; Forts. 1

☞ Weil man die Zahlen vertauscht hat.

*Wie zum Beispiel Daar 3. Da hat man 5+2+2
gesprochen. Da zweite aufgabe 5+2+1 hat das
gleiche Ergebnis weil man die 3 von der 2
auf die 50 ausgetauscht hat. Genau wie
bei der 5+1. Da hat man die 1 auf die 20 ausgetauscht.*

*☞ Weil man die Zahlen einfach vertauscht
Das heißt*

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schüler begründen: Forts. 2

→ Weil zum Beispiel $63+14$ das selbe ist wie $64+13$ nämlich beides ergibt 77!

→ Weil bei einem Paar immer dasselbe Ergebnis heraus kommt. Zum Beispiel bei zwei Schritten da sind für auch noch zwei verschiedene Schritte. Folter?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Zurück zur Schulbuchseite: Ausschnitt 1

Rechen-Olympiade

The image shows a page from a 'Rechen-Olympiade' (Math Olympiad) with several problems and solutions. Problem (a) involves a grid of numbers. Problem (b) lists several arithmetic operations. Problem (c) asks to subtract the same number from both results of a previous problem. The page includes the Olympic rings logo and a page number '23'.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgabenanalyse

Beispiel 2

- Manche Aufgaben enthalten keine Hinweise auf prozessbezogenen Tätigkeiten

c) Addiere immer die beiden Ergebnisse.

$450 + 80$	$450 + 120$
$450 - 80$	$450 - 120$
$450 - 65$	$450 + 145$
$450 + 65$	$450 - 145$

5

Nun ist die Lehrkraft am Zug: Welches Potential zum

- Problemlösen
- Modellbilden/Mathematisieren
- Argumentieren
- Kommunizieren
- Darstellen

steckt neben inhaltlich mathematischen Aktivitäten, (dem „Rechnen“), in dieser Aufgabe?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Allgemein:

- Welches Potential steckt, welche Möglichkeiten stecken in dieser Aufgabe für prozessbezogene Tätigkeiten/Kompetenzen?
 - Entscheidend: Das professionelle Wissen der Lehrkraft zu prozessbezogenen Kompetenzen/Tätigkeiten. Dieser Punkt ist bereits wesentlich für die Auswahl gerade dieser „vielversprechenden“ Aufgabe aus der Schulbuchseite
- Wie kann ich als Lehrkraft dieses Potential für meinen Unterricht nutzen?
 - Entscheidend: Schaffung von günstigen Lernbedingungen

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Problemlösen, Mathematisieren

- Überraschende Feststellung beim Rechnen(!): Bei der Addition der Ergebnisse ergibt sich stets 900
- Welches Muster, welcher strukturelle Zusammenhang verbindet die einzelnen Teilaufgaben?
 - Welche Gemeinsamkeiten/Unterschiede sind bei den Teilaufgaben festzustellen? (In jeder Teilaufgabe kommt 450 vor; bei jedem Aufgabenpärchen wird jeweils eine Zahl addiert und die gleiche Zahl subtrahiert)

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Argumentieren/Begründen/Formulieren

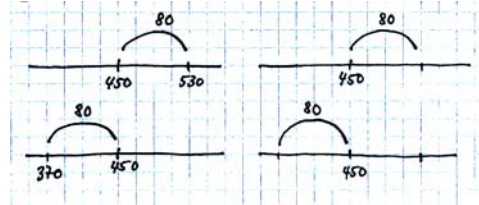
- Was erhält man bei Addition der Ergebnisse von z.B. $450-70$ und $450+74$? Warum nicht 900 ? (An Vereinbarungen/Regeln halten, die Regel/das Muster formulieren)
- Woran liegt es, dass sich bei Addition der Ergebnisse in den gegebenen Päckchen stets 900 ergibt?
 - Formal: $450 + 80 + 450 - 80 = 900$
 $450 - 65 + 450 + 65 = 900$, usw.
 - Was ist das Gemeinsame/die Struktur?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Argumentieren/Begründen/ Formulieren (Forts.)

– Begründung mit dem Rechenstrich



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Problemlösen, entdeckendes Lernen, Argumentieren

- Über das Gegebene hinausgehen/Verallgemeinern: Denkt euch neue Aufgabenpaare aus, bei denen die Summe der Ergebnisse auch 900 ist.
- Zunehmende Schematisierung/Ablösung von Einzelfällen: Warum ist das immer so?
- Variationen der Aufgabe:
 - Denkt euch Aufgabenpaare aus, bei denen die Summe der Ergebnisse z.B. 560 (561) ist.
 - Was passiert, wenn man die Ergebnisse subtrahiert?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beispiel 3. Eine Sachsituation: Welcher Wochentag?

Im Jahre 2003 gab es im Januar genau 4 Dienstage und genau 4 Samstage. Auf welchen Wochentag fiel der 9. Januar 2003?

1. Zugang: Im Kalender von 2003 nachschauen
2. Zugang: Wir haben ein Problem, weil kein unmittelbar abrufbares Verfahren zur Verfügung steht um die Frage zu beantworten. Mit anderen Worten: Zwischen dem Gegebenen und dem gesuchten besteht eine Barriere.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Mathematisieren der Sachsituation

Kann es ein Dienstag (Samstag) gewesen sein?

Mathematisieren, Modellieren: Aktivierung von Kalenderwissen. Januar hat 31 Tage, jede Woche hat 7 Tage

Rechnen im Modell: Der 9.1., 16.1., 23.1. 30.1. Wäre dann auch jeweils ein Dienstag (Samstag), aber auch der 2.1. Rückbezug auf die gegebene Situation: Das kann nicht sein, weil im betreffenden Januar genau 4 Dienstage (Samstage) vorkamen.

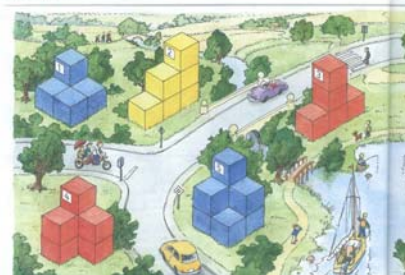
Das Modell, die Überlegung hat sich bewährt. Entsprechendes Vorgehen für die anderen Tage.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beispiel 4. Würfel-Umgebung

Würfeltown



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Würfel-Schrägbild



42

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Würfel-Bauplan



43

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

In diesem Würfel/Quader-Kontext: Mit Quadern hantieren



Zahlenzauber 4

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Variation: Anzahl der Quaderbausteine Quaderpackungen

Aus 6 quaderförmigen Zündholzschachteln sollen durch „volles“ Aneinanderlegen längs der Seitenflächen verschiedenartige Quader hergestellt werden.

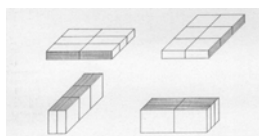
Beispiele



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

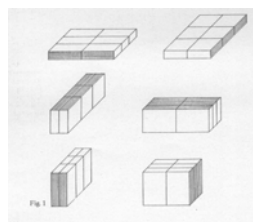
Quaderpackungen: Sind das alle?



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

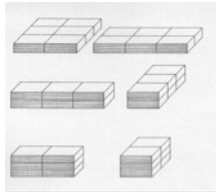
Quaderpackungen: Sind das alle?



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Systematisieren, Übersicht verschaffen: Reibefläche nach vorne, Aufbau nach Schichten



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Sammeln von Ergebnissen

Anzahl Streichholz-Schachteln	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Quader	1	3	3	6	3	9	3

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Variation durch Spezialisierung: Quaderpackungen aus Würfeln

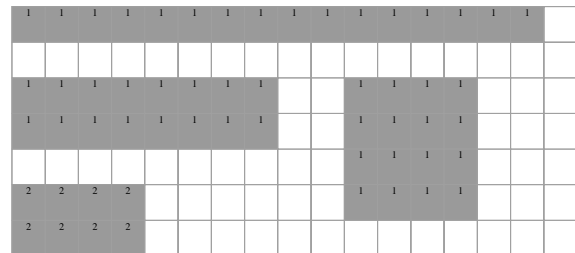
Anzahl Würfel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Quader	1	1	1	2	1	2	1	3	2	2

Anzahl Würfel	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl Quader	1	4	1	2	2	4	1	4	1	4

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

16 Würfel: 4 Quaderbaupläne



27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgabenvariation-Aufgaben gestalten

Prozessbezogene Aktivitäten ergeben sich vielfach in Verbindung mit der Variation von Aufgaben (für die wir bereits einige Beispiele kennen gelernt haben)

- angestoßen durch die Lehrkraft
- spontan durch Schüler

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgabenbeispiele aus dem Schulbuch (1)

3. Vergleiche die Ergebnisse der untereinanderstehenden Aufgaben.
 1277 · 5 1338 · 6 1202 · 6 771 · 9 832 · 7 537 · 8 567 · 7
 1459 · 4 1026 · 8 709 · 3 3132 · 3 857 · 5 1731 · 4 1077 · 9

$$\begin{array}{l} 1277 \cdot 5 = 6385 \\ 1459 \cdot 4 = 5836 \end{array}$$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Variation: Schüler erfinden selbstständig Aufgaben mit der gleichen Struktur.

3. Vergleiche die Ergebnisse der untereinanderstehenden Aufgaben.

1 277 · 5 1 338 · 6 1 202 · 6 771 · 9 832 · 7 537 · 8 567 · 7
1 459 · 4 1 026 · 8 709 · 3 3 132 · 3 857 · 5 1 731 · 4 1 077 · 9

$$\begin{array}{l} 237 \cdot 3 = \\ \square \cdot \square = \square \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 429 \cdot 6 = \\ \square \cdot \square = \square \end{array} \right.$$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Aufgabenbeispiele aus dem Schulbuch (2)
Variation: Schüler erfinden selbstständig Aufgaben mit der gleichen Struktur.

8. Addiere die Ergebnisse der untereinanderstehenden Aufgaben.

857 · 8 759 · 6 432 · 7 879 · 3 828 · 8 393 · 9 683 · 5
786 · 4 605 · 9 744 · 4 893 · 7 344 · 4 848 · 5 535 · 4

$$\begin{array}{l} 857 \cdot 8 = 6856 \\ 786 \cdot 4 = 3144 \\ 10000 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 216 \cdot 2 = \square \\ \square \cdot \square = \square \end{array} \right.$$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beispiel (3) zur Aufgabenvariation

Ausgangsaufgabe

Wähle eine zweistellige Zahl, z.B. 24.

Füge zwischen den Ziffern 2 und 4 eine Null ein; du erhältst 204.

Subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl!

$$\begin{array}{r} 204 \\ - 24 \\ \hline 180 \end{array}$$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Beispiel (3) Fortsetzung

Nimm jetzt die Zahl 27 als Ausgangszahl und gehe wie oben vor

$$\begin{array}{r} 207 \\ - 27 \\ \hline 180 \end{array}$$

Überraschung: Wieder 180

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Welche „Stücke“/ Parameter bestimmen die Aufgabe?

- Die Ausgangszahl
- Die Anzahl der Stellen der Ausgangszahl
- Die Anzahl der eingefügten Nullen
- Die Differenz

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Variationen der Ausgangsaufgabe

- Für welche Ausgangszahlen in der Ausgangsaufgabe ergibt sich die Differenz 180?
- Welche Differenzen treten überhaupt auf (Situation Ausgangsaufgabe)? Warum ist das so?
- Wir gehen von einer dreistelligen Ausgangszahl aus und fügen *eine* Null ein.
- Was passiert mit der Differenz, wenn man bei zweistelliger Ausgangszahl zwei Nullen einfügt?

Bemerkung: Aufgabenparameter können i.d.R. nicht unabhängig von einander variiert werden.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Entdeckungen im Hunderterfeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bekannt, aber dennoch schön: $4 + 15 = 14 + 5$,
 $18 + 29 = 28 + 19$, etc

Variation der Verknüpfung:
 $4 \cdot 15 = 60$
 $14 \cdot 5 = 70$

$18 \cdot 29 = 522$
 $28 \cdot 19 = 532$

Was fällt auf?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Entdeckungen im Hunderterfeld: Begründen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Variation der Verknüpfung:
 $4 \cdot 15 = 60$

$14 \cdot 5 = 70$

Umordnen:
 $4 \cdot 15 = 60$

$5 \cdot 15 = 75$ +15 +10

$5 \cdot 14 = 70$ -5

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Entdeckungen im Hunderterfeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Variation der Form,
Addition:
 $4 + 14 = 13 + 5$,
 $18 + 28 = 27 + 19$, etc

Multiplikation:
 $4 \cdot 14 = 56$
 $13 \cdot 5 = 65$

$18 \cdot 28 = 504$
 $27 \cdot 19 = 513$

Was fällt auf?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Entdeckungen im Hunderterfeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Variation der Quadratgröße,
Addition:
 $4 + 26 = 24 + 6$,
 $18 + 40 = 38 + 20$, etc

Multiplikation:
 $4 \cdot 26 = 104$
 $24 \cdot 6 = 144$

$18 \cdot 40 = 720$
 $38 \cdot 20 = 760$

Was fällt auf?

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Entdeckungen im Hunderterfeld

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eine weitere Variation
(Quadratsummen):

$4 \cdot 4 + 15 \cdot 15 = 241$
 $14 \cdot 14 + 5 \cdot 5 = 221$

$18 \cdot 18 + 29 \cdot 29 = 1165$
 $28 \cdot 28 + 19 \cdot 19 = 1145$

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Was sind nun „Gute und andere Aufgaben“?

Die Klassifizierung von Aufgaben als „gute“ oder „andere“ hängt von der verfolgten Zielsetzung ab: *Gute Aufgaben* sind bei der von uns eingenommenen Position solche, welche bei Schülern in Verbindung mit grundlegenden mathematischen Begriffen und Verfahren die Entwicklung und Festigung prozessbezogener Tätigkeiten bzw. Kompetenzen unterstützen können.

Andere Aufgaben sind solche, mit denen andere Ziele verfolgt werden. Es kann also auch andere gute Aufgaben geben!

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schwierigkeiten bei der Umsetzung

- Die erhöhten kognitiven Anforderungen von Guten Aufgaben stellen für Schüler und Lehrer eine besondere Herausforderung dar.
- Tendenz zur Komplexitätsverminderung
 - Schüler drängen gelegentlich vorschnell auf Lösungshilfen
 - Lehrkräfte reduzieren daraufhin wohlmeinend prozessbezogene Aspekte zu Gunsten des „Rechnens“
- Somit: Sparsame Hilfen (möglichst zur Selbsthilfe), keine Teillösungen verraten.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Schwierigkeiten bei der Umsetzung Fortsetzung

- Genügend Zeit einräumen. Schüler brauchen Zeit zum
 - Nachdenken,
 - Untersuchen,
 - Gedankenaustausch mit anderen Schülern.
- Fehler als Chancen zu lernen, als Erlebnis von motivationsfördernder Diskrepanz. Trennung von Lern- und Leistungssituationen.

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU

Fragen und Antworten lernen - als Qualitätsmerkmal von Aufgaben

All unser Unterricht muss dahin kommen,
dass das Kind fragt und nicht der Lehrer.
(Kühnel, 1907)

27.10.2005
slvsh, Rendsburg

Prof. Dr. G. Walther, CAU